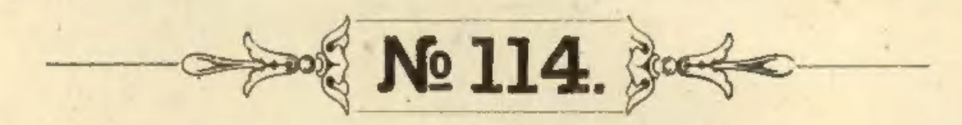
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 114.

X Сем. 5 Марта 1891 г. № 6.

О РАЗЛОЖЕНІИ МНОГОЧЛЕНОВЪ НА МНОЖИТЕЛЕЙ.

Въ этой статьѣ показаны общіе способы отысканія раціональныхъ множителей цѣлыхъ многочленовъ съ соизмѣримыми коэффиціентами.

Подъ „раціональнымъ множителемъ" разумѣется цѣлый многочленъ съ раціональными коэффиціентами.

Разсматриваемые здѣсь способы, по своей сложности, имѣютъ, въ большинствѣ случаевъ *), мало практическаго значенія; главный интересъ ихъ теоретическій: *разложеніе многочлена на множителей сводится къ опредѣленному и конечному ряду дѣйствій* **).

Разложеніе на множители многочлена, содержащаго одну букву X.

Упрощеніе вопроса.

1. Вопросъ о разложеніи на множителей многочлена съ соизмѣримыми коэффиціентами сводится къ вопросу о разложеніи на множителей многочлена съ цѣлыми коэффиціентами, такъ какъ общій знаменатель всѣхъ коэффиціентовъ можетъ быть отнесенъ къ множителю, не содержащему буквы x.

2. Вопросъ о разложеніи на множителей многочлена съ цѣлыми коэффиціентами сводится къ вопросу о разложеніи на множителей многочлена съ цѣлыми же коэффиціентами, у котораго коэффиціентъ при высшей степени x равенъ 1.

---

*) Вездѣ, гдѣ возможно, мы приводимъ теоремы, облегчающія практическую сторону.

**) При составленіи этой статьи авторъ пользовался слѣдующими сочиненіями:
1) *Serret*. Cours d'Algebre supérieure. 4 édition. 1877 г.
2) *Сохоцкій*. Высшая алгебра. Часть I. 1882 г.
3) *Ващенко-Захарченко*. Алгебраическій анализъ. 1887 г.
4) *de Longchamps*. Algèbre. 1883 г.
5) *Селивановъ*. Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій. 1885 г.
6) *Селивановъ*. Объ уравненіяхъ 5-ой степени. 1889 г.
7) *Сомовъ*. Теорія опредѣленныхъ алгебраическихъ уравненій высшихъ степеней. 1838 г. и др.

Пусть:

$$M = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots\ldots + A_n.$$

Введемъ новую перемѣнную y, опредѣляемую условіемъ:

$$x = \frac{y}{A_0}.$$

Тогда:

$$M = \frac{1}{A_0^{\,n-1}}(y^n + A_1y^{n-1} + A_2A_0y^{n-2} + \ldots\ldots + A_0^{\,n-1}A_n).$$

Здѣсь у многочлена, стоящаго въ скобкахъ, коэффиціентъ при старшей степени y равенъ 1, всѣ же остальные коэффиціенты суть числа цѣлыя.

Впредь будетъ всегда предполагаться, что разлагаемый на множителей многочленъ M_x приведенъ именно къ такой формѣ, т. е.

$$M_x = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots\ldots + A_n,$$

гдѣ всѣ A суть числа цѣлыя.

Одно общее свойство разложенія.

Теорема Гаусса). Если M_x разложенъ на раціональныхъ множителей, то коэффиціенты ихъ всегда можно сдѣлать цѣлыми числами.*

Пусть

$$M_x = AB$$

Приведемъ въ каждомъ изъ множителей всѣ коэффиціенты къ общему знаменателю и положимъ, что:

$$A = \frac{P}{\theta} \quad \text{и} \quad B = \frac{P_1}{\theta_1}.$$

Пусть, кромѣ того, α означаетъ одного изъ простыхъ множителей знаменателя θ. По отношенію къ этому множителю члены числителя P могутъ быть раздѣлены на 2 категоріи: члены одной категоріи дѣлятся на α, а другой—нѣтъ. Обозначимъ черезъ $S\alpha$ совокупность членовъ, дѣлящихся на α и черезъ T совокупность членовъ, не дѣлящихся на α. Тогда:

$$P = S\alpha + T$$

и, подобнымъ же образомъ:

$$P_1 = S_1\alpha + T_1.$$

---

*) См. Disquisitionnes arithmeticae, S 42 и *Селиванова* „Объ уравненіяхъ 5-ой степени“.

Слѣдовательно:

$$M_x = \frac{PP_1}{QQ_1} = \frac{SS_1\alpha^2 + (TS_1 + ST_1)\alpha + TT_1}{QQ_1}.$$

Такъ какъ коэффиціенты M_x—цѣлые, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что TT_1 дѣлится на α.

Чтобы это было возможно, надо допустить, что T или T_1 равно нулю. Первое невозможно, такъ какъ дробь $\frac{P}{Q}$ предполагается не сократимой. Слѣдовательно:

$$T_1 = 0,$$

и поэтому:

$$P_1 = S_1\alpha.$$

Отсюда выходитъ такое заключеніе: всякій первоначальный множитель, входящій въ составъ общаго знаменателя одного изъ производителей A и B, входитъ въ составъ числителя другого производителя.

Слѣдовательно, послѣ всѣхъ сокращеній коэффиціенты обоихъ множителей сдѣлаются цѣлыми.

Слѣдствіе 1-ое. Коэффиціентъ при старшей степени x у каждаго множителя M_x можно считать равнымъ 1.

Слѣдствіе 2-ое Если одинъ изъ множителей M_x имѣетъ цѣлые коэффиціенты, то коэффиціенты другого множителя суть также числа цѣлыя.

Отысканіе множителей 1-ой степени.

Всѣ множители первой степени, по предыдущему, имѣютъ видъ $x-\alpha$, гдѣ α цѣлое число. Поэтому отысканіе ихъ сводится къ отысканію α.

Такъ какъ, по теоремѣ *Безу* *), α должно быть корнемъ уравненія:

$$M_x = 0,$$

то вопросъ приводится къ отысканію цѣлыхъ корней послѣдняго уравненія.

Если нѣтъ средствъ рѣшить уравненіе въ радикалахъ, то для отысканія множителей вида $x-\alpha$ или, говоря иначе, цѣлыхъ корней уравненія, можно воспользоваться слѣдующей теоремой.

Теорема. Для того чтобы M_x дѣлился на $x-\alpha$ **) *необходимо и достаточно, чтобы частныя:*

$$q_1 = \frac{A_n}{\alpha},\quad q_2 = \frac{q_1 + A_{n-1}}{\alpha},\quad q_3 = \frac{q_2 + A_{n-2}}{\alpha}, \ldots\ldots\ldots q_n = \frac{q_{n-1} + A_1}{\alpha}$$

*) Здѣсь предполагаются извѣстными слѣдующія теоремы:

1. Если $M_\alpha = 0$, то M_x дѣлится на $x-\alpha$.

2. Если M_x дѣлится на $x-\alpha$, то $M_\alpha = 0$.

**) Надо помнить, что α—цѣлое число.

равнялись цѣлымъ числамъ и, сверхъ того, чтобы послѣднее частное было равно —1.

Необходимость этихъ условій есть слѣдствіе теоремы *Гаусса*, такъ какъ всѣ вышенаписанныя частныя суть коэффиціенты (съ обратными знаками) частнаго отъ дѣленія M_x на $x-\alpha$ (при расположеніи дѣлимаго и дѣлителя по возрастающимъ степенямъ буквы x).

q_n должно быть равно единицѣ, потому что коэффиціентъ послѣдняго члена частнаго, при дѣленіи безъ остатка, равенъ коэффиціенту послѣдняго члена дѣлимаго, дѣленному на коэффиціентъ послѣдняго члена дѣлителя.

Изложенныя условія достаточны, потому что изъ послѣдняго, по замѣнѣ q_{n-1}, q_{n-2}..... ихъ значеніями, получается:

$$M_\alpha=0.$$

Схема дѣйствія. На основаніи предыдущей теоремы для отысканія цѣлыхъ значеній α надо найти всѣхъ дѣлителей постояннаго члена въ M_x и испытывать ихъ, составляя частныя:

$$q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots\ldots$$

Дѣйствіе обыкновенно располагаютъ такъ: выписываютъ въ одну строку коэффиціентовъ даннаго многочлена и послѣдній изъ нихъ дѣлятъ на α, при чемъ частное съ обратнымъ знакомъ подписываютъ подъ дѣлимымъ;

1	A_1	A_2	.... A_{n-1}	A_n	α.
			$-q_2$	$-q_1$	

Затѣмъ къ предпослѣднему коэффиціенту прибавляютъ частное и результатъ дѣлятъ на α; новое частное съ измѣненнымъ знакомъ подписываютъ подъ новымъ дѣлимымъ и т. д.

Такимъ образомъ одновременно съ испытаніемъ получаютъ коэффиціентовъ частнаго, къ которому можно примѣнить тотъ же способъ для слѣдующаго дѣлителя.

Замѣчанія, облегчающія отысканіе множителей вида $x-\alpha$.

1. Если M_x имѣетъ множителя $x-\alpha$, то частныя:

$$\frac{M_1}{\alpha-1}, \quad \frac{M_{-1}}{\alpha+1}$$

суть цѣлыя числа.

Это непосредственно слѣдуетъ изъ тождества:

$$M_x=(x-\alpha)Q_x, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

въ которое вмѣсто x надо подставить послѣдовательно $+1$ и -1.

2. *Замѣчаніе Гаусса.* Если ни одно изъ чиселъ:

$$M_1,\quad M_0,\quad M_{-1}$$

не дѣлится на 3, то M_x не имѣетъ множителей вида $x-a$.

Дѣйствительно, изъ тождества (1) слѣдуетъ:

$$-M_1=(a-1)\theta_1$$

$$-M_0=a\theta_0.$$

$$-M_{-1}=(a+1)\theta_{-1}.$$

Такъ какъ одно изъ чиселъ: $a-1$, a, $a+1$ непремѣнно дѣлится на 3, то то же относится къ одному изъ чиселъ: M_1, M_0 и M_{-1}.

Слѣдовательно, если эта дѣлимость не имѣетъ мѣста, то M_x не дѣлится на $x-a$.

3. *Правило Лагранжа.* Если M_x имѣетъ множителя $x-a$, въ которомъ a цѣлое положительное число, то:

$$a<1+\sqrt[r]{N},$$

гдѣ $(-N)$ наименьшій изъ отрицательныхъ коэффиціентовъ въ M_x, а r указатель перваго отрицательнаго коэффиціента въ томъ же многочленѣ. (Многочленъ предполагается расположеннымъ по убывающимъ степенямъ и счетъ коэффиціентовъ ведется слѣва на право).

Чтобы доказать правило Лагранжа, достаточно убѣдиться, что при значеніяхъ x, удовлетворяющихъ неравенству:

$$x\geqq 1+\sqrt[r]{N}$$

M_x не равенъ нулю.

И дѣйствительно, при всякомъ положительномъ значеніи x:

$$M_x\geqq x^n-N(x^{n-r}+x^{n-r-1}+\ldots\ldots+1)=x^n-\frac{N(x^{n-r+1}-1)}{x-1}=$$

$$=\frac{x^{n-r+1}[x^{r-1}(x-1)-N]+N}{x-1}.$$

Послѣднее выраженіе будетъ положительнымъ, если x, будучи больше 1, удовлетворяетъ условію:

$$x^{r-1}(x-1)>N,$$

а какъ, по предположенію:

$$x>x-1>0,$$

то послѣднее требованіе будетъ удовлетворено при:

$$(x-1)^r\geqq N$$

или при:

$$x \geqq 1+\sqrt[r]{N}.$$

Слѣдовательно, при всѣхъ значеніяхъ, равныхъ или большихъ $1+\sqrt[r]{N}$, многочленъ равенъ положительному числу и потому:

$$a<1+\sqrt[r]{N}.$$

Число $1+\sqrt[r]{N}$ называется *высшимъ предѣломъ положительныхъ корней уравненія* $M_x=0$.

Если M_x дѣлится на $x-a$, гдѣ a отрицательное число, то отрицательное число $(-A)$, удовлетворяющее неравенству:

$$a>-A,$$

найдется, если примѣнимъ предыдущія разсужденія къ многочлену M_{-x}. Найденное такимъ образомъ число называется *высшимъ предѣломъ отрицательныхъ корней*. Знаніе предѣловъ корней полезно въ томъ отношеніи, что уменьшается число испытаній: надо испытывать только тѣхъ дѣлителей, которые заключаются между найденными предѣлами.

Примѣръ:

$$M_x=x^5-34x^3+29x^2+212x-300.$$

Предѣлы корней могутъ быть иногда найдены и помимо правила Лагранжа, болѣе простыми пріемами. Въ данномъ случаѣ можно употребить такое преобразованіе:

$$M_x=(x^5-34x^3)+(29x^2+212x-300).$$

Легко видѣть, что первое скобочное выраженіе будетъ положительнымъ при:

$$x>\sqrt{34},$$

слѣдовательно, напримѣръ, при:

$$x=6,$$

а какъ то же относится и ко второму скобочному выраженію, то за высшій предѣлъ положительныхъ корней можно принять 6.

Подобнымъ же образомъ легко убѣдиться, что высшій предѣлъ отрицательныхъ корней равенъ (-6).

Слѣдовательно нужно подвергнуть испытанію только тѣхъ дѣлителей послѣдняго члена, которые заключаются въ предѣлахъ $+6$ и (-6).

Эти дѣлители суть: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5.

Такъ какъ:

$$M_1=-92,$$

$$M_{-1}=-450,$$

то $+1$ и -1 не суть корни.

Такъ какъ:

$$\frac{M_{-1}}{3+1},\quad \frac{M_1}{-2-1},\quad \frac{M_1}{\pm 4-1},\quad \frac{M_1}{-5-1}$$

не суть цѣлыя числа, то, на основаніи замѣчанія 1-го, числа 3, —2, ± 4, —5 не могутъ быть корнями.

Остается подвергнуть испытанію числа +2, —3, +5, что и сдѣлано въ слѣдующей таблицѣ:

+1	0	−34	+29	+212	−300	2
	+1	+2	−30	−31	150	2
		+1	+4	−22	−75	−3
			+1	+1	−25	

5 не есть корень, потому что:

$$\frac{1+5}{5}$$

не равно цѣлому числу.

Слѣдовательно:

$$M_x=(x-2)^2(x+3)(x^2+x-25)$$

Замѣчаніе. Если M_x имѣетъ множителя $(x-\alpha)^k$, то A_n дѣлится на α^k, A_{n-1} дѣлится на α^{k-1}, A_{n-2} дѣлится на α^{k-2} и т. д.

Пусть:

$$M_x=(x-\alpha)^k\theta_x,\quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ θ_x, частное отъ дѣленія M_x на $(x-\alpha)^k$, выражается такъ:

$$\theta_x=x^{n-k}+B_1x^{n-k-1}+B_2x^{n-k-2}+\ldots\ldots+B_{n-1}.$$

Развертывая $(x-\alpha)^k$ по биному Ньютона, получимъ:

$$(x-\alpha)^k=x^k+C_1\alpha x^{k-1}+C_2\alpha^2x^{k-2}+\ldots\ldots+C_k\alpha^k,$$

гдѣ C_1. C_2, C_3..... суть цѣлыя положительныя или отрицательныя числа.

Пользуясь найденными выраженіями для $(x-\alpha)^k$ и θ_x и сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ тождествѣ (1), получимъ:

$$A_n=C_kB_{n-1}\alpha^k$$

$$A_{n-1}=C_kB_{n-2}\alpha^k+B_{n-1}C_{k-1}\alpha^{k-1}$$

$$A_{n-2}=C_kB_{n-3}\alpha^k+B_{n-2}C_{k-1}\alpha^{k-1}+B_{n-1}C_{k-2}\alpha^{k-2}$$

и т. д.

Изъ этихъ равенствъ вытекаетъ справедливость утвержденія.

Теорія равныхъ множителей.

Хотя помощью вышеизложеннаго способа можно отыскать всѣхъ соизмѣримыхъ множителей 1-ой степени, однако равные множители, какъ первой такъ и высшихъ степеней, могутъ быть найдены пріемами болѣе простыми *).

Въ дальнѣйшемъ намъ понадобится формула, выражающая разложеніе даннаго многочлена по степенямъ $x-a$, гдѣ a произвольное число,— поэтому выведемъ эту формулу.

Формула Тайлора (частный видъ).

Въ многочленѣ M_x замѣнимъ x черезъ $a+(x-a)$; тогда получимъ:

$$M_x=[a+(x-a)]^n+A_1[a+(x-a)]^{n-1}+\dots\dots\dots+A_n.$$

Выполнивъ во второй части возвышенія въ степень по биному Ньютона (принимая $x-a$ за одинъ членъ) и расположивъ результатъ по степенямъ $x-a$, найдемъ:

$$M_x=M_a+(x-a)\frac{M'_a}{1!}+(x-a)^2\frac{M''_a}{2!}+\dots\dots\dots+(x-a)^n\frac{M^{(n)}}{n!}. \qquad (1)$$

Здѣсь приняты слѣдующія обозначенія:

---

*) Для пониманія этого отдѣла требуется знаніе слѣдующихъ истинъ:

Число корней всякаго алгебр. уравненія равно показателю его степени.

Если корни уравненія

$$M_x=0 \quad \text{суть: } x_1,\ x_2\dots\dots\dots x_n,$$

то

$$M_x=(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n).$$

Это разложеніе многочлена на линейныхъ множителей—единственное, т. е. другихъ такихъ разложеній не существуетъ.

Всѣ эти теоремы суть слѣдствія одной: всякое алгебраическое уравненіе имѣетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ корень.

Теорема эта трудно поддается точному элементарному изложенію и потому въ начальныхъ учебникахъ (и даже во французскихъ спеціально математическихъ классахъ) приводится обыкновенно въ формѣ постулата. Выводъ же изъ нея вышеупомянутыхъ слѣдствій можно найти въ каждомъ болѣе или менѣе полномъ элементарномъ учебникѣ алгебры. (См. напр. Алгебра Бертрана въ переводѣ Билибина).

Впрочемъ отдѣлъ этотъ, какъ представляющій самостоятельное цѣлое, можетъ быть пропущенъ безъ ущерба для пониманія дальнѣйшаго.

$$M'_\alpha = n\alpha^{n-1} + (n-1)A_1\alpha^{n-2} + \dots\dots\dots + A_{n-1}$$

$$M''_\alpha = n(n-1)\alpha^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1\alpha^{n-3} + \dots\dots\dots + 2A_{n-2}$$

$$M'''_\alpha = n(n-1)(n-2)\alpha^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)A_1\alpha^{n-4} + \dots\dots + 2.3A_{n-3}.$$

. . . .

$$M^{(n)}_\alpha = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots 1 = n!$$

Очевидно, что M', M'', M''' суть соотвѣтственныя значенія слѣдующихъ многочленовъ, при $x=\alpha$:

$$M'_x = nx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + \dots\dots\dots + A_{n-1}$$

$$M''_x = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} + \dots\dots\dots + 2A_{n-2}$$

$$M'''_x = n(n-1)(n-2)x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)A_1x^{n-4} + \dots\dots\dots + 2.3A_{n-3}$$

и т. д.

M'_x называется *первымъ производнымъ* многочленомъ отъ даннаго, M''_x—*вторымъ* и т. д.

Первый производный многочленъ составляется изъ даннаго по такому закону: коэффиціентъ каждаго члена даннаго многочлена умножается на показателя буквы x въ томъ же членѣ, всѣ показатели у x уменьшаются на 1, и членъ, не содержащій x, отбрасывается.

По такому же закону составляется второй производный многочленъ изъ перваго, третій—изъ второго и т. д. Производный многочленъ n-го порядка есть постоянное число.

Замѣтимъ еще, что формула (1), будучи примѣнена къ многочленамъ M'_x, M''_x и т. д., доставитъ слѣдующія тождества:

$$M'_x = M'_\alpha + (x-\alpha)\frac{M''_\alpha}{1!} + (x-\alpha)^2\frac{M'''_\alpha}{2!} + \dots\dots\dots + (x-\alpha)^{n-1}\frac{M^{(n)}_\alpha}{(n-1)!}$$

$$M''_x = M''_\alpha + (x-\alpha)\frac{M'''_\alpha}{1!} + (x-\alpha)^2\frac{M''''_\alpha}{2!} + \dots\dots\dots + (x-\alpha)^{n-2}\frac{M^{(n)}_\alpha}{(n-2)!}$$

и т. д.

Теоремы о равныхъ множителяхъ.

Изъ формулъ:

(1) $$M_x = M_\alpha + (x-\alpha)\frac{M'_\alpha}{1!} + (x-\alpha)^2\frac{M''_\alpha}{2!} + \dots\dots\dots + (x-\alpha)^n\frac{M^{(n)}_\alpha}{n!}$$

(2) $$M'_x = M'_\alpha + (x-\alpha)\frac{M''_\alpha}{1!} + (x-\alpha)^2\frac{M'''_\alpha}{2!} + \dots\dots + (x-\alpha)^{n-1}\frac{M^{(n)}_\alpha}{(n-1)!}$$

(3) $$M''_x = M''_\alpha + (x-\alpha)\frac{M'''_\alpha}{1!} + (x-\alpha)^2\frac{M''''_\alpha}{2!} + \dots\dots + (x-\alpha)^{n-2}\frac{M^{(n)}_\alpha}{(n-2)!}$$

вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1. Если M_x содержитъ множителя $(x-a)^k$, то

$$M_a=0 \quad M'_a=0\ldots\ldots\ldots M^{(k-1)}{}_a=0.$$

Это вытекаетъ изъ формулы (1).

Обратное заключенiе очевидно справедливо.

2. Если M_x содержитъ множителя $(x-a)^k$, то M'_x содержитъ его въ степени $(k-1)$, M''_x—въ степени $(k-2)$ и т. д.*).

Это слѣдуетъ изъ формулъ (2), (3) и т. д.

Множители первой степени, принадлежащiе M_x, вовсе не входятъ въ M'_x.

Замѣчанiе. Если M_x имѣетъ множителя X^k, гдѣ X многочленъ какой угодно степени, то M'_x имѣетъ множителя X^{k-1}, потому что

$$X^k=(x-\beta_1)^k(x-\beta_2)^k\ldots\ldots\ldots,$$

гдѣ β_1, β_2 и пр. суть корни уравненiя:

$$X=0.$$

3. Если M_x не имѣетъ кратныхъ множителей, то общiй наибольшiй дѣлитель M_x и M'_x равенъ 1; если же въ M_x входятъ множителями:

$$(x-a_1)^{n_1},\quad (x-a_2)^{n_2},\quad (x-a_3)^{n_3}\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

то общiй наибольшiй дѣлитель M_x и M'_x равенъ:

$$(x-a_1)^{n_1-1}(x-a_2)^{n_2-1}(x-a_3)^{n_3-1}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Разысканiе равныхъ множителей.

Обозначимъ произведенiе одиночныхъ множителей M_x черезъ P_1, произведенiе двойныхъ—черезъ P_2, тройныхъ—P_3 и т. д.

Пусть, сверхъ того, D_1 обозначаетъ общаго наибольшаго дѣлителя между M_x и M'_x, D_2—общаго наибольшаго дѣлителя между D_1 и его производнымъ многочленомъ D'_1, D_3—общаго наибольшаго дѣлителя между D_2 и D'_2 и т. д.

---

*) Обратныя заключенiя вообще не справедливы: если, напримѣръ, M'_x содержитъ множителя $(x-a)^k$, то нельзя сказать навѣрное, что M_x содержитъ $(x-a)^{k+1}$, потому что M_a можетъ быть не равно нулю и тогда M_x вовсе не содержитъ множителя $x-a$. Можно сдѣлать только такое заключенiе: если M'_x содержитъ множителя $(x-a)^k$, то M_x или вовсе не содержитъ множителя $x-a$, или содержитъ его въ степени $(k+1)$.

Тогда:

$$M_x = P_1 P_2^2 P_3^3 \ldots\ldots\ldots P_k^k, \qquad (1)$$

$$D_1 = P_2 P_3^2 \ldots\ldots\ldots\ldots P_k^{k-1}, \qquad (2)$$

$$D_2 = P_3 P_4^2 \ldots\ldots\ldots\ldots P_k^{k-2} \qquad (3)$$

. . . .

$$D_{k-1} = P_k,$$

гдѣ первыя части извѣстны.

Раздѣлимъ почленно первое равенство на второе, второе на третье и т. д., получимъ:

$$\frac{M_x}{D_1} = \theta_1 = P_1 P_2 \ldots\ldots \ldots P_k.$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \theta_2 = P_2 P_3 \ldots\ldots\ldots P_k.$$

. . . .

$$\frac{D_{k-2}}{D_{k-1}} = \theta_{k-1} = P_{k-1} P_k.$$

Далѣе опять раздѣлимъ θ_1 на θ_2, θ_2 на θ_3 и т. д. Найдемъ:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = P_1; \quad \frac{\theta_2}{\theta_3} = P_2, \ldots\ldots \frac{\theta_{k-1}}{D_{k-1}} = P_{k-1}.$$

Такимъ образомъ найдемъ произведеніе одиночныхъ множителей, произведеніе двойныхъ множителей, тройныхъ и т. д.

Подставивъ ихъ въ (1), получимъ разложеніе для M_x. Далѣе останется только разложить на множители P_1, P_2, P_3 и т. д.

Замѣтимъ, что P_1, P_2... суть многочлены съ цѣлыми коэффиціентами, что непосредственно слѣдуетъ изъ процесса ихъ нахожденія.

Примѣръ:

$$M_x = x^{12} + 16x^{11} + 36x^{10} + 86x^9 + 121x^8 + 132x^7 + 48x^6 - 144x^5 - 3x^4 - 72x^3 +$$
$$+ 324x^2 + 81x + 243.$$

$$D_1 = x^6 + 6x^5 + 21x^4 + 38x^3 + 51x^2 + 36x + 27.$$

$$D_2 = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 6x + 9.$$

$$D_3 = x^2 + 2x + 3.$$

$$D_4 = 1.$$

$$\theta_1 = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x + 9.$$

$$\theta_2 = x^2 + 2x + 3.$$

$$\theta_3 = x^2 + 2x + 3; \qquad \theta_4 = x^2 + 2x + 3.$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = x^4 - 3x + 3 = P_1.$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_3} = 1 = P_2.$$

$$\frac{\theta_3}{\theta_4} = 1 = P_3.$$

$$\frac{\theta_4}{D_4} = x^2 + 2x + 3 = P_4.$$

Слѣдовательно:

$$M_x = (x^4 - 3x + 3)(x^2 + 2x + 3)^4.$$

Легко убѣдиться, что выраженія, стоящія въ скобкахъ не разлагаются на раціональныхъ множителей.

Замѣчаніе. Изъ предыдущаго вытекаетъ слѣдующее заключеніе: *если многочленъ M_x, третьей или пятой степени, не имѣетъ цѣлыхъ корней, то онъ не имѣетъ и равныхъ корней*. Дѣйствительно, напримѣръ, въ случаѣ многочлена 5-ой степени изъ гипотезы:

$$M_x = (x - \alpha)^3 (x - \beta)^2$$

слѣдуетъ, что $P_2 = x - \alpha$ и $P_3 = x - \beta$, а, по предыдущему P_2 и P_3 суть многочлены съ цѣлыми коэффиціентами; гипотеза:

$$M_x = (x - \alpha)^2 (x - \beta)^2 (x - \gamma)$$

предполагаетъ существованіе цѣлаго корня—γ и т. д.

(Окончаніе слѣдуетъ).

М. Попруженко (Оренбургъ).

НОВЫЙ СПОСОБЪ ИЗВЛЕЧЕНІЯ КОРНЕЙ

какой угодно степени.

1. Въ статьѣ моей „Среднія величины, ариѳметическая, геометрическая и гармоническая“, помѣщенной въ „Вѣстникѣ Оп. Физ. и Элем. Матем.“ №№ 78 и 79 за 1889 годъ, я показалъ, какъ можно посредствомъ комбинаціи ариѳметической и гармонической средней находить геометрическую среднюю изъ двухъ данныхъ чиселъ. А такъ какъ геометриче-

ская средняя изъ двухъ чиселъ есть квадратный корень изъ ихъ произведенія, то отсюда получилась возможность находить квадратные корни посредствомъ составленія ряда ариѳметическихъ и гармоническихъ среднихъ, вычисленіе которыхъ требуетъ только дѣйствій сложенія и дѣленія. Тѣ-же разсужденія, которыя привели меня тогда къ способу отысканія квадратнаго корня чиселъ, будучи нѣсколько обобщены, даютъ новый способъ для вычисленія корней какой угодно степени, посредствомъ комбинаціи нѣсколькихъ среднихъ. И въ самомъ дѣлѣ, какъ я покажу въ настоящей статьѣ, можно комбинировать нѣкоторыя среднія величины такъ, чтобы получать въ результатѣ безконечнаго числа послѣдовательныхъ вычисленій этихъ среднихъ геометрическую среднюю изъ какого угодно числа чиселъ. А такъ какъ геометрическая средняя изъ n чиселъ есть корень n-ой степени изъ произведенія этихъ чиселъ, то такимъ образомъ получается своеобразный способъ нахожденія, съ какою угодно степенью точности, корней изъ заданныхъ чиселъ.

2. Разсмотримъ сперва для простоты первое обобщеніе указаннаго способа—нахожденіе кубическаго корня какъ геометрической средней изъ трехъ какихъ нибудь множителей заданнаго числа.

Пусть намъ задано три числа a, b, c, при чемъ

$$a \geqq b \geqq c.$$

Случай $a=b=c$ мы можемъ исключить изъ разсмотрѣнія, такъ какъ тогда намъ нечего искать кубическаго корня изъ даннаго числа—онъ уже извѣстенъ и равенъ именно a. Итакъ намъ остаются только случаи

$$a=b>c$$
$$a>b=c$$
$$a>b>c.$$

Составимъ ариѳметическую среднюю a_1 изъ этихъ трехъ чиселъ, т. е. вычислимъ выраженіе

$$a_1 = {}^1/_3(a+b+c).$$

Составимъ затѣмъ гармоническую среднюю c_1 изъ тѣхъ-же трехъ чиселъ, т. е. вычислимъ обратную величину ариѳметической средней изъ обратныхъ величинъ заданныхъ трехъ чиселъ,

$$\frac{1}{c_1} = {}^1/_3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

откуда

$$c_1 = \frac{3abc}{bc+ca+ab}.$$

Наконецъ составимъ еще третье выраженіе, которое будемъ называть для краткости „парною среднею“, а именно

$$b_1 = \frac{bc+ca+ab}{a+b+c}.$$

3. Убѣдимся теперь, что

$$a_1 > b_1 > c_1.$$

Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ

$$a_1 - b_1 = {}^1/_3(a+b+c) - \frac{bc+ca+ab}{a+b+c}$$

$$= {}^1/_3 \cdot \frac{1}{a+b+c} \{a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab\}$$

$$= {}^1/_6 \cdot \frac{(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2}{a+b+c},$$

а это есть величина существенно положительная. Итакъ

$$a_1 > b_1.$$

Точно такъ-же найдемъ

$$b_1 - c_1 = \frac{bc+ca+ab}{a+b+c} - \frac{3abc}{bc+ca+ab}$$

$$= \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{1}{bc+ca+ab} \{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-a^2bc-ab^2c-abc^2\}$$

$$= \frac{(ca-ab)^2+(ab-bc)^2+(bc-ca)^2}{2(a+b+c)(bc+ca+ab)},$$

а это опять величина существенно положительная. Итакъ

$$b_1 > c_1.$$

А слѣдовательно

$$a_1 > b_1 > c_1$$

что и требовалось доказать.

Покажемъ еще, что

$$a > a_1 \qquad c < c_1.$$

Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ

$$a_1 = {}^1/_3(a+b+c) < {}^1/_3(a+a+a) = a.$$

И точно также

$$c_1 = \frac{3abc}{bc+ca+ab} > \frac{3abc}{ab+ab+ab} = c.$$

Итакъ полученныя новыя три числа a_1, b_1, c_1, заключены въ болѣе тѣсныхъ предѣлахъ, чѣмъ три заданныя числа: разность между

крайними числами a_1 и c_1 меньше, чѣмъ между крайними заданными числами a и c.

4. Изъ этихъ трехъ чиселъ a_1, b_1, c_1, можемъ получить такимъ-же точно образомъ три новыя числа a_2, b_2, c_2, вычисляя ихъ по формуламъ

$$a_2 = {}^1/_3(a_1 + b_1 + c_1)$$

$$b_2 = \frac{b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1}{a_1 + b_1 + c_1}$$

$$c_2 = \frac{3a_1b_1c_1}{b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1}.$$

При этомъ опять окажется

$$a_2 > b_2 > c_2$$

$$a_1 > a_2 \qquad c_1 < c_2$$

т. е. новыя числа, расположенныя по величинѣ въ томъ-же порядкѣ. какъ и первоначальныя, будутъ заключены опять въ болѣе тѣсныхъ предѣлахъ.

Продолжая то-же дѣйствіе надъ новыми числами далѣе, мы получимъ послѣдовательно ряды чиселъ

$$a > a_1 > a_2 > a_3 \ldots\ldots$$

$$b, \quad b_1, \quad b_2, \quad b_3 \ldots\ldots$$

$$c < c_1 < c_2 < c_3 \ldots\ldots$$

при чемъ будетъ также всегда

$$a \geq b \geq c \qquad a_1 > b_1 > c_1 \qquad a_2 > b_2 > c_2 \ldots\ldots$$

Итакъ числа a_1, a_2, a_3...... представляютъ убывающій рядъ, числа c_1, c_2, c_3...... рядъ возрастающій. При этомъ числа a всегда больше чиселъ c. Такимъ образомъ въ предѣлѣ, числа a стремятся къ нѣкоторому предѣлу a_∞, а числа c,—къ нѣкоторому предѣлу c_∞ Покажемъ, что $a_\infty = c_\infty$, т. е. что числа a и c стремятся къ одному и тому-же предѣлу, который мы назовемъ l. Очевидно, что къ тому-же предѣлу будутъ стремиться и числа b, такъ какъ они должны постоянно оставаться въ промежуткѣ между a и c.

5. Для этого составимъ разности $a - c$, $a_1 - c_1$, $a_2 - c_2$,...... и докажемъ, что онѣ стремятся къ нулю, а не къ какому либо иному числу. Итакъ находимъ сперва

$$a_1 - c_1 = {}^1/_3(a + b + c) - \frac{3abc}{bc + ca + ab}.$$

Послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій отсюда легко получается

$$a_1-c_1=\frac{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2}{3(bc+ca+ab)}.$$

Замѣняя здѣсь въ числителѣ меньшія разности большими, можемъ написать

$$a_1-c_1<\frac{\{a(b-c)+b(a-c)+c(a-b)\}(a-c)}{3(bc+ca+ab)}={}^2/_3\frac{b(a-c)}{bc+ca+ab}(a-c).$$

Но очевидно

$$ba-bc<bc+ca+ab$$

т. е. отношеніе $b(a-c)$ къ $bc+ca+ab$ меньше единицы. Обозначимъ

$$\frac{b(a-c)}{bc+ca+ab}=\varepsilon,$$

гдѣ ε будетъ нѣкоторая правильная дробь. Тогда будемъ имѣть окончательно

$$a_1-c_1<{}^2/_3\varepsilon(a-c).$$

Точно также получится

$$a_2-c_2<{}^2/_3\varepsilon_1(a_1-c_1)$$

$$a_3-c_3<{}^2/_3\varepsilon_2(a_2-c_2)$$

. . . .

и соединяя n такихъ неравенствъ найдемъ

$$a_n-c_n<({}^2/_3)^n\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\ldots\varepsilon_{n-1}(a-c).$$

Съ увеличеніемъ n до безконечности правая часть этого неравенства очевидно стремится къ нулю, а слѣдовательно къ нулю-же стремится и разность a_n-c_n, что и требовалось доказать.

6. Убѣдимся теперь, что предѣлъ, къ которому стремятся числа a_i, b_i, c_i, есть геометрическая средняя изъ заданныхъ трехъ чиселъ a, b, c. Для этого достаточно замѣтить, что имѣетъ мѣсто равенство

$$abc=a_1b_1c_1,$$

а слѣдовательно и

$$abc=a_1b_1c_1=a_2b_2c_2=\ldots\ldots=a_nb_nc_n.$$

Но въ предѣлѣ

$$\lim a_n=\lim b_n=\lim c_n=l.$$

Итакъ будетъ

$$l^3 = abc \qquad l = \sqrt[3]{abc}.$$

ч. т. д. Пусть теперь

$$abc = N$$

тогда имѣемъ

$$l = \sqrt[3]{N}$$

т. е. рядъ указанныхъ операцій привелъ насъ къ кубическому корню изъ числа N. Итакъ мы нашли слѣдующее правило для вычисленія кубическаго корня изъ какого нибудь числа.

7. *Если взять три какія нибудь числа такъ, чтобы произведеніе ихъ было равно заданному числу* N, *и составить ариѳметическую, гармоническую и парную среднюю изъ этихъ чиселъ, затѣмъ тѣ-же среднія изъ этихъ трехъ среднихъ и т. д., то получится три ряда чиселъ, которыя всѣ стремятся къ предѣлу, равному кубическому корню изъ даннаго числа.*

Конечно всегда легко подобрать три такія числа, произведеніе которыхъ равно данному числу. Можно напр. взять два числа совершенно произвольно, а за третье принять частное отъ дѣленія заданнаго числа на произведеніе взятыхъ двухъ произвольныхъ чиселъ. Однако практически, для того, чтобы получать по возможности быстро болѣе точныя значенія искомаго кубическаго корня, слѣдуетъ стараться выбрать начальныя числа a, b, c, по возможности близкими одно къ другому, т. е. близкими къ искомому значенію корня. Чѣмъ ближе будутъ первоначальныя числа къ результату, тѣмъ быстрѣе будутъ къ нему приближаться ряды чиселъ.

8. *Примѣръ*. Найдемъ по указанному способу $\sqrt[3]{2}$. Точное значеніе это корня есть

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992105.$$

За исходныя числа возьмемъ здѣсь 2, 1, 1. Тогда получимъ

$$a_1 = {}^1/_3(2+1+1) = {}^4/_3$$

$$b_1 = \frac{1.1+2.1+2.1}{2+1+1} = {}^5/_4$$

$$c_1 = \frac{3.2.1.1}{1.1+1.2+2.1} = {}^6/_5$$

Какъ и должно быть

$$a_1 > b_1 > c_1 \ldots\ldots\ldots {}^4/_3 > {}^5/_4 > {}^6/_5,$$

а также

$$a > a_1 \ldots\ldots\ldots 2 > {}^4/_3$$
$$c < c_1 \ldots\ldots\ldots 1 < {}^6/_5$$

Найденныя числа,—лучше всего среднее изъ нихъ b,—можно уже разсматривать какъ первое приближенiе искомаго кубическаго корня. И въ самомъ дѣлѣ напр. $b_1=1{,}250$ отличается отъ него только на 0.01. Продолжая составлять среднiя величины далѣе, найдемъ во второмъ приближенiи

$$a_2={}^1/_3({}^4/_3+{}^5/_4+{}^6/_5)={}^{227}/_{180}$$
$$b_2=({}^5/_4\cdot{}^6/_5+{}^6/_5\cdot{}^4/_3+{}^4/_3\cdot{}^5/_4):({}^4/_3+{}^5/_4+{}^6/_5)={}^{286}/_{227}$$
$$c_2=3\cdot{}^4/_3\cdot{}^5/_4\cdot{}^6/_5:({}^5/_4\cdot{}^6/_5+{}^6/_5\cdot{}^4/_3+{}^4/_3\cdot{}^5/_4)={}^{180}/_{143}.$$

Здѣсь уже напр.

$$b_2=1{,}259912$$

т. е. b_2 отличается уже только на 0,00001 отъ $\sqrt[3]{2}$. Въ то же время имѣемъ

$$a_2=1{,}261 \qquad c_2=1{,}259.$$

Въ третьемъ приближенiи получаемъ—если вычислять одно только

$$b_3={}^{27825466}/_{22085087}=1{,}25992105$$

т. е. искомое значенiе кубическаго корня найдено уже съ 8 вѣрными десятичными знаками. *І. А. Клейберъ* (Спб.)

(*Окончанiе слѣдуетъ*).

ЗАДАЧИ.

№ 185. Рѣшить систему:

$$(x+2)(y+2)(z+2)=3,$$
$$(x^2+4)(y^2+4)(z^2+4)=100,$$
$$(x^3+8)(y^3+8)(z^3+8)=504.$$

Я. Тепляковъ (Радомысль).

№ 186. Даны двѣ окружности радiусовъ R и r, касающiяся внѣшнимъ образомъ. Называя разстоянiе точки касанiя отъ внѣшней общей касательной черезъ h, показать что

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{2}{h}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 187. Доказать теоремы: если діагонали вписаннаго въ кругъ четыреугольника пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то:

1) сумма квадратовъ двухъ противоположныхъ сторонъ равна квадрату діаметра круга,

2) перпендикуляръ, опущенный изъ центра круга на одну изъ сторонъ, равенъ половинѣ противолежащей стороны,

3) средины сторонъ четыреугольника и основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки пересѣченія діагоналей на стороны, расположены на одной окружности, центръ которой есть средина прямой, соединяющей центръ круга съ точкою пересѣченія діагоналей.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 188. Даны двѣ прямыя, которыя продолжить въ сторону встрѣчи невозможно. Требуется раздѣлить уголъ между этими прямыми на двѣ части такъ, чтобы одна часть имѣла опредѣленную величину.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 189. Даны двѣ прямыя, которыя можно продолжать только въ ту сторону, въ которой онѣ не встрѣчаются. Требуется раздѣлить уголъ между этими прямыми на n частей такъ, чтобы каждая изъ $(n-1)$ частей имѣла опредѣленную величину.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 190. Даны три прямыя SA, SB, SC, не лежащія въ одной плоскости и составляющія углы:

$$\angle BSC=\alpha; \quad \angle ASB=\gamma; \quad \angle ASC=\beta.$$

Черезъ S проведена прямая SD одинаково наклоненная къ даннымъ. Опредѣлить уголъ, который составляетъ прямая SD съ каждой изъ данныхъ прямыхъ. *Н. Николаевъ* (Пенза).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 238. Изъ трехъ данныхъ точекъ описать три взаимно касающіяся окружности.

Изслѣдовать задачу въ отношеніи числа возможныхъ рѣшеній и расположенія точекъ.

Положимъ, что A, B и C данныя точки.

Соединяемъ эти точки прямыми линіями и въ полученный теугольникъ ABC впишемъ окружность, касающуюся сторонъ AB, BC и CA соотвѣтственно въ точкахъ c, a, b. Изъ A зачерчиваемъ окружность радіусомъ Ab; а такъ какъ

$$Ab=Ac,$$

то эта-же окружность пройдетъ и черезъ c; такимъ-же образомъ изъ B проводимъ окружность радіусомъ Ba(=Bc) и изъ C—радіусомъ Ca(=Cb);

начерченныя окружности будутъ взаимно касаться, ибо разстоянія между ихъ центрами равняются суммѣ соотвѣтственныхъ радіусовъ:

$$AB=Ac+cB,\quad BC=Ba+aC \quad и \quad AC=Ab+bC.$$

Задача имѣетъ всегда 4 рѣшенія соотвѣтственно внутри-вписанной въ $\triangle ABC$ окружности и тремъ внѣвписаннымъ. Въ томъ случаѣ, когда три данныя точки лежатъ на одной прямой, задача неопредѣленна.

А. Бобятинскій (Барнаулъ), ***Мясковъ*** (Слонимъ). Ученики: Вятск. р. уч. (6) *И. П.*, Тифл. р. уч. (6) *Н. П.*

№ 324. Построить треугольникъ такъ, чтобы стороны его были параллельны тремъ даннымъ прямымъ и чтобы вершины его находились на данной окружности.

Изъ произвольной точки A_1 данной окружности O проводимъ хорды A_1B_1 и A_1C_1 параллельно двумъ даннымъ прямымъ—DE и FG; изъ даннаго центра O проводимъ окружность касательную къ хордѣ B_1C_1, затѣмъ проводимъ въ данной окружности хорду BC параллельную третьей данной прямой HI и касательную къ зачерченной окружности, и наконецъ изъ B и C проводимъ прямыя BA и CA параллельно прямымъ B_1A_1 и C_1A_1. $\triangle ABC$ и есть искомый, такъ какъ точка A должна лежать на данной окружности ($\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$ и $\smile BC=\smile B_1C_1$).

С. Блажко и *П. Петровъ* (Москва), *В. Михайловъ* (Харьковъ), *А. Бобятинскій* (Барнаулъ), *А. Яницкій* (Кіевъ), *Я. Эйлеръ* (Спб.). Ученики: Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Курск. г. (7) *Т. Ш.*, Полт. Дух. Сем. (3) *С. З.*, Кам.-Под. г. (7) *А. Р.*

№ 523. Какъ велика длина секунднаго маятника въ томъ мѣстѣ, гдѣ маятникъ длиною въ 1 метръ дѣлаетъ 239 колебаній въ 4 минуты?

Извѣстно, что для маятниковъ неравныхъ длинъ времена колебаній прямо пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ ихъ длинъ. Время колебанія даннаго маятника$=^{4.60}/_{239}$ сек., время колебанія искомаго$=1$ сек.; длина даннаго маятника$=1$ метру,—искомаго$=x$ метр., а потому

$$^{240}/_{239} : 1 = 1 : \sqrt{x},$$

откуда

$$x=(^{239}/_{240})^2=0{,}9899 \text{ метра.}$$

С. Карновичъ и *В. Форсель* (Воронежъ). Ученики: Черниг. г. (8) *Д. З.*, Курск. г. (7) *В. Х.*, Пинск. р. уч. (6) *С. Т.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 7 Апрѣля 1891 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К⁰.